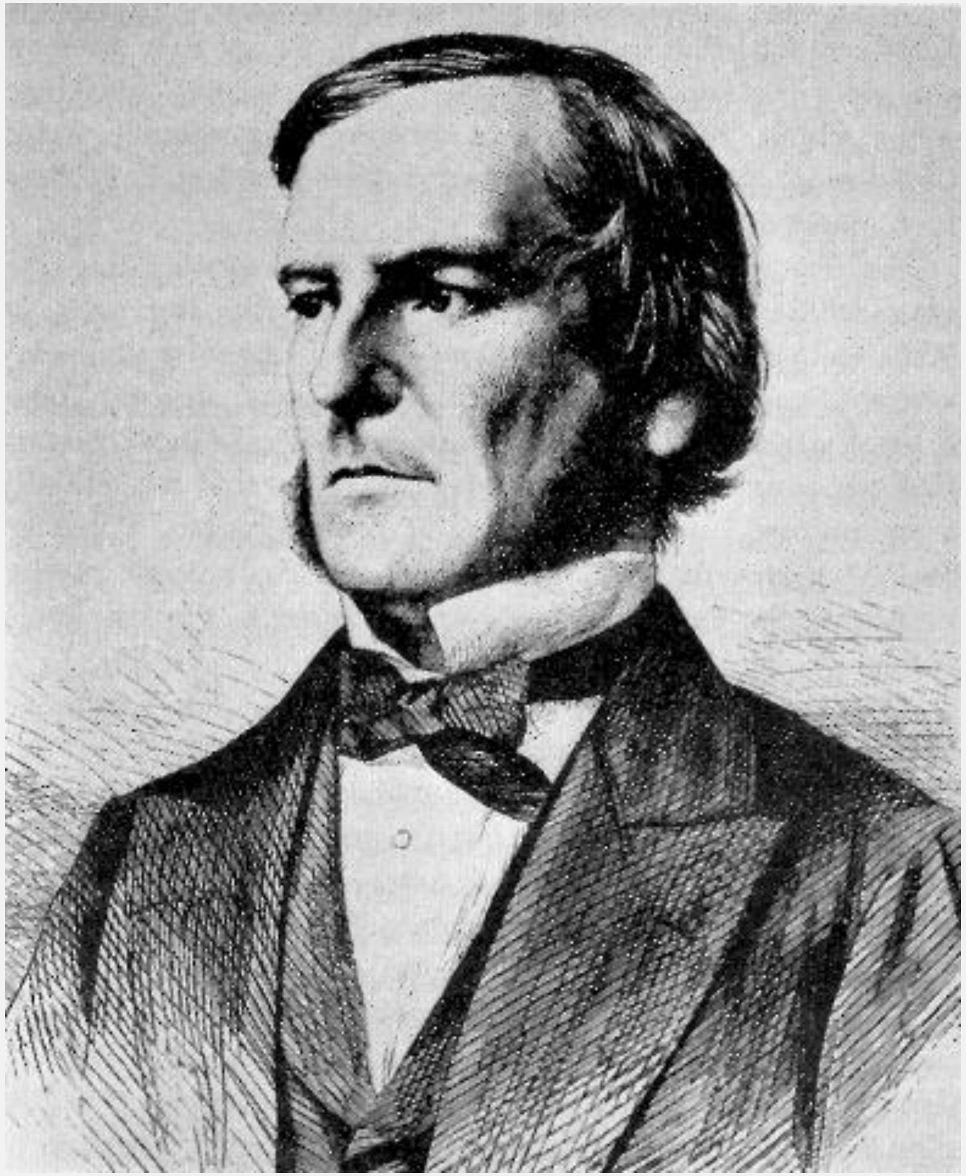
Rane ideje o formalizovanju i mehanizovanju izračunavanja i rešavanja matematičkih problema Bul

Darija Eremija, mi18122@alas.matf.bg.ac.rs

Rani život i početak Bulovog interesovanja za nauku



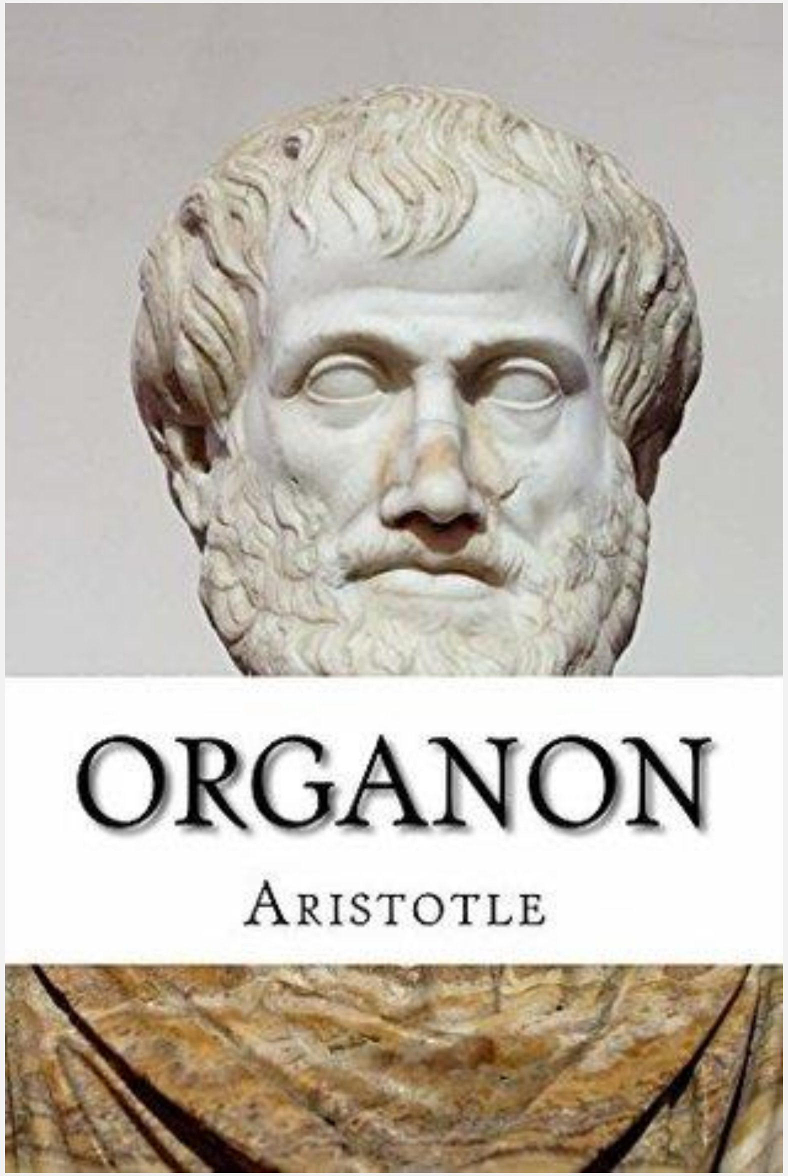
- Rođen 2. novembra 1815. u Linkonu, kao prvo od četvoro dece Meri i Džona Bula
- Interesovanje za nauku je nasledio od oca
- Zbog loše finansijske situacije porodica nije mogla da mu obezbedi odgovarajuće formalno obrazovanje, tako da je uz pomoć oca bio samouk
- Sa 7 godina je počeo da se interesuje za jezike i otac mu je doveo prodavca knjiga da ga uči latinski jezik
- Kasnije samostalno naučio i grčki kao i francuski i nemački jezik

- Odustao od prvobitne ambicije da se prodruži sveštenstvu
- Sa 16 godina postao je asistent i učitelj u školi u Dančesteru (primoran pošto je posao njegovog oca potpuno propao i morao je da izdržava roditelje, braću i sestru)
- Posle dve godine je otpušten zbog nereligioznog ponašanja
- Sve više okretanje matematici
- Smatrao je da knjige o matematici daju najbolju vrednost
- Inspiracija mu je iznenada došla tokom boravka u Metodističkoj školi, dok je hodao poljem dobio je ideju da bi trebalo biti moguće izraziti logičke odnose u algebraskom obliku

- Sa 19 godina Bul pokreće sopstvenu školu u Linkolnu,gde se zadržao 15 godina sve dok nije prihvatio mesto profesora na novoosnovanom univerzitetu u Korku u Irskoj
- Prateći stope svog oca takođe je bio povezan sa Linkolnovim mehaničkim institutom

Nastanak logike

- Logika je kao nauka zasnovana u IV veku p.n.e. u delu Organon grčkog filozofa Aristotela
- Aristotel je u tom delu sistematizovao dotadašnja znanja u novoj oblasti i sačinio prvu lekciju pravila deduktivnog zaključivanja
- Ta pravila bi po Aristotelu trebalo da budu oruđe kojim bi se služile druge nauke



Gotfrid Lajbnic(1646-1716)

- Lajbnic je najvažniji logičar od vremena Aristotela do Bulovog i De Morganovog vremena
- Lajbnic je izneo glavne karakteristike onoga što nazivamo konjukcija, disjunkcija, negacija, identitet, podskupovi i prazni skupovi
- Osnovni principi Lajbnicove logike mogu se svesti na dva osnovna principa:

1. sve naše ideje su sastavljene od vrlo malog broja prostih ideja koje čine alfabet ljudske misli (ljudskog razmišljanja),
2. kompleksne (složene) ideje nastaju iz ovih prostih ideja jednoobraznom i simetričnom kombinacijom, analogno aritmetičkom množenju.

- Smatrao je da osnovni uzrok stagnacije logike leži u jeziku kojim se ona služila
- Među prvima pokušao da verbalno rezonovanje zameni simboličkim jezikom
- ,,Jedini način da ispravimo naše mišljenje je da ga učinimo opipljivim, stvarnim poput matematičara, tako da kad otkrijemo našu grešku i kada postoje sporovi, neslaganja među ljudima možemo prosto reći: Hajde da izračunamo bez dalje prepirke i da vidimo ko je u pravu"
- Nažalost Lajbnic nije uspeo da realizuje svoje ideje, njegovi spisi nisu objavljeni (većina onog što je napisao postoji samo u vidu beleški) i otkriveni su tek 1905. godine kada je problem bio rešen i to na način na koji je on predlagao

Bulova algebra logike

- Iako su Lajbnicove ideje bile ispred njegovog vremena, Bul je bio taj koji ih je na neki način realizovao (neznajući za njih)
- Ozvaničio je logičke principe koristeći algebarske simbole, ostavljajući trajan uticaj na modernu logiku
- Pokrenuo je logiku iz stagnacije prevevši je na jezik matematike, odnosn o na jezik algebre

Klasična Aristeotelova logika

- Prvi je pokušao da obezbedi temelj za principe Aristotelove logike, korišćenjem algebarskih simbola za predstavljanje logičkih izjava i uspostavljanjem algebre simbola
- Analizirao je rečenice koje su se javljale u Aristotelovim silogizmima kao što su:

  Sve biljke su žive.

  Svi ljudi su smrtni.

  Neke životinje lete.

  …
- Bul primećuje da je ono što je značajno u logičkom rasuđivanju o rečima kao što su živ, ljudi, lete… klasa/kolekcija svih pojedinaca opisanih rečju klasa živih bića/klasa ljudi..
- Kako se ova vrsta zaključivanja može izraziti u terminima algebre takvih klasa?

- Bul je koristio slova za predstavljanje klasa kao što su slova ranije korišćena za predstavljanje brojeva
- Ako x i y predstavljaju odredjene klase onda xy predstavlja klasu stvari koje pripadaju i klasi x i klasi y
- x- klasa belih stvari
- y – klasa ovaca
- z– klasa rogatih stvari
- xy -klasa belih ovaca
- xyz – klasa belih rogatih ovaca

- Bul je smatrao da je ova operacija primenjena na klase na neki način nalik operaciji množenja primenjenoj na brojeve ali primetio je suštinsku razliku:
- Ako je y klasa ovaca, šta je yy?
  - Klasa ovaca koje su takođe i ovce
  - Dakle važi yy = y i to je uvek tačno
- Kada je yy = y u običnoj algebri?

$$y_1 = 0$$
$$y_2 = 1$$

  - Ovo dovodi Bula da principa: algebra logike je ono što bi bila obična algebra kada bi bila ograničena na dve vrednosti 0 i 1.

0 i 1 u kontekstu klasa

- 0x = 0 za svaku klasu x
  - 0 predstavlja klasu kojoj ništa ne pripada
  - U modernoj terminologiji 0 je prazan skup

- 1x = x za svaku klasu x
  - 1 prestavlja klasu koja sadrži svaki predmet koji se može razmatrati
  - Univerzum diskursa (svaka promenljiva ima svoj u.d u zavisnosti od konteksta, tj skup elemenata u kome ta promenljiva uzima vrednost)

+ i – u kontekstu klasa

- Ako su x i y dve klase
- x+y predstavlja klasu svih stvari koje se nalaze u x ili y (unija u modernoj terminologiji)
- x-y predstavlja klasu svih stvari koje se nalaze u x, a ne nalaze se u y (razlika)
- 1-x predstavlja klasu stvari koje ne pripadaju x (komplement)

  važi: $(1 - x) + x = 1$

Bulovo osnovno pravilo i princip protivrečnosti

$xx = x$

$x^2 = x$

$x – x^2 = 0$

$x(1-x) = 0$

- Ništa ne može istovremeno i pripadati i ne pripadati klasi x
- Bul je smatrao da ovo izražava Aristotelov princip protivrečnosti, za koji je Aristotel smatrao da je osnov sve filozofije, princip koji se ne dokazuje, izvor svih ostali aksioma

Primarne propozicije logike

- Deo logike koju je Aristotel proučavao bavi se silogizmima
- Preslikavanje para iskaza - premisa u zaključak - konkluziju
- Premise i konkluzije moraju biti predstavljeni rečenicama koje pripadaju jednom od četiri tipa:

1)Univerzalno pozitivne	Svi X su Y.
2)Partikularno pozitivne	Neki X su Y.
3)Univerzalno negativne	Nijedno X nije Y.
4)Partikularno negativne	Neko X nije Y.

primer valjanog silogizma:

Svi X su Y
<u>Svi Y su Z</u>
Svi X su Z

- Da je ovaj silogizam valjan znači da ako bilo koja svojstva budu zamenjena za X, Y i Z i sve dok su date dve premise tačne, biće tačna i konkluzija.
- Na primer:
  Svi golubovi su ptice.
  <u>Sve ptice imaju perje.</u>
  Svi golubovi imaju perje.

Primarne propozicije logike

Primary Propositions	*MAL* (1847)		*LT* (1854)	
All X is Y	$x(1-y)=0$	p.26	$x=vy$	pp.64,152
No X is Y	$xy=0$		(not primary)	——
All X is all Y	(not primary)	——	$x=y$	
Some X is Y	$v=xy$		$vx=vy$	
Some X is not Y	$v=x(1-y)$		(not primary)	——

Sekundarne propozicije

- Sekundarne propozicije kako ih je Bul opisao odnose se na izvedene izjave koja su izgrađene na primarnim propozicijama logike
- Sekundardne propozicije izražavaju odnose između drugih propozicija
- Bulov rad ima za cilj da uspostavi sistem logike zasnovan na matematičkim principima, gde sekundarne propozicije igraju ključnu ulogu u širem okviru logičkog zaključivanja
- One su deo logičke strukture koja podržava analizu i izvodjenje daljih istina iz utvrdjenih premisa, samim tim dublji nivo rasudjivanja u odnosu na Aristotelove silogizme

Secondary Propositions	*MAL* (1847)		*LT* (1854)	
X is true	$x = 1$	p.51	$x = 1$	p.172
X is false	$x = 0$	p.51	$x = 0$	p.172
X is true and Y is true	$xy = 1$	p.51	$xy = 1$	p.172
X is true or Y is true (inclusive)	$x + y - xy = 1$	p.52	—	
X is true or Y is true (exclusive)	$x - 2xy + y = 1$	p.53	$x(1 - y) + y(1 - x) = 1$	p.173
If X is true then Y is true	$x(1 - y) = 0$	p.54	$x = vy$	p.173

- 1847, *The Mathematical Analysis of Logic (Matematička Analiza Logike)*

  (prva knjiga o simboličkoj logici u kojoj je uveo koncept Bulove algebre)
- 1854, *An Investigation of The Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities /(Laws of Thought) (istraživanje zakona misli na kome se zasniva matematička teorija logike I verovatnoće)*

Primer

Džo ne može da pronađe svoj novčanik i Suzan mu pomaže.
Suzan: Da li si ga ostavio u prodavnici?
Džo: Ne, zvao sam ih, nisu ga našli. Da sam ga ostavio tamo, sigurno bi ga našli.
Suzan: Sinoć si platio račun u restoranu i videla sam da ga stavljaš u džep od jakne. Ako ga od tad nisi koristio, sigurno je još uvek tu.
Džo: U pravu si. Nisam ga koristio. U džepu je.
Džo proverava i nalazi novčanik.

Hajde da vidimo kako se Bulova algebra može koristiti za analizu Džoovog i Suzaninog rezonovanja.

- O = Džo je ostavio čekovnu knjižicu u supermarketu
- P = Džoova čekovna knjižica je pronađena u supermarketu
- N = Džo je sinoć napisao ček u restoranu
- D = Nakon što je napisao ček, Džo je stavio čekovnu knjižicu u džep
- S = Džo nije koristio svoju čekovnu knjižicu od sinoć
- J = Džoova čekovna knjižica je još u džepu

Premise:	
1) Ako važi O onda P	$O(1-P) = 0$
2) Nije P	$P = 0$
3) N i D	$ND = 1$
4) Ako N i D i S onda J	$NDS(1-J) = 0$
5) S	$S = 1$
Konkluzije:	
1) Nije O	$O = 0$
2) J	$J = 1$

Zaključak

- Veliko dostignuće Džordža Bula bilo je da pokaže da se logička dedukcija može razviti kao grana matematike
- Iako je za vreme života pobedio u akademskoj zajednici, njegove ideje su uglavnom bile ignorisane ili kritikovane
- Od Bula je matematička logika bila neprekidno u razvoju i njegovi naslednici (u teoriji algebarske logike) su produbili njegov rad i time je nastalo ono što danas zovemo Bulova algebra
- Šenonova primena Bulove algebre omogućila je razvoj logičkih kola, koja su osnova za funkcionisanje modernih računarskih sistema

- Bulova algebra predstavlja formalan način za opisivanje logičkih operacija, pa Bulova ideja o formalizovanju logike ima neosporan značaj koji se ogleda:

1) u različitim oblastima matematike (statistika,teorija skupova..)

2) u dizajniranju i analizi digitalnih elektronskih kola

3) javlja se u skoro svim programskim jezicima (logičke operacije)

Samim tim se može reći da su Bulove ideje dovele do razvoja koji on nije mogao ni da zamisli