

# Zetetika

~ 4 ~

---

Staša Vujičić Stanković

# Rekli su ...

---

- Aleksandar Dima (1802 - 1870), francuski književnik  
Sve generalizacije su opasne, uključujući i ovu.
- Aristotel (384 - 322 BC)  
Moguće je da se nemoguće stvari mogu dogoditi.

Slučajan događaj

---

# Slučajan događaj

---

- Slučajan događaj = događaj koji se ne može predvideti.
- Primer: bacanje novčića, glava ili pismo

# Osnovna svojstva slučajnog događaja

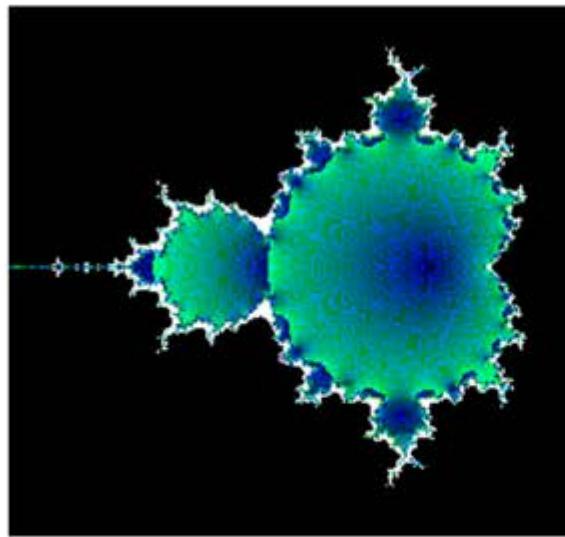
---

- Bilo koja **konačna** sekvenca događaja se može desiti.
- Primer:
  - Može 100.000 puta uzastopno da padne glava
  - Ali ne može beskonačno mnogo puta da padne glava

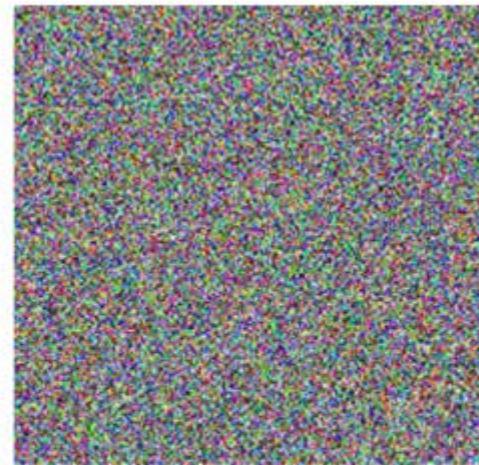
# Slučajan događaj i složenost

---

- Koja od ove tri slike je najsloženija?



A



B



C

- Slike A i B se mogu opisati malim programima:

```
protected void paintComponent(Graphics g) {  
    int w=getWidth(),hgetHeight();  
    for (int x=0;x<w;x++) {  
        for (int y=0;y<h;y++) {  
            double xx=4.0*x/w-2.0;  
            double yy=4.0*y/h-2.0;  
            g.setColor(new Color((int)(diverge(xx,yy)*100000)));  
            g.drawLine(x,y,x,y);  
        }  
    }  
  
    private double diverge(double x,double y) {  
        double xx=x,yy=y;  
        for (int i=0;i<20;i++) {  
            double tmpX=xx;  
            xx=xx*xx-yy*yy+x;  
            yy=2*tmpX*yy+y;  
        }  
        if (Double.isNaN(xx) || Double.isNaN(yy)) return 0;  
        return Math.sqrt(xx*xx+yy*yy);  
    }  
}
```

A

```
protected void paintComponent(Graphics g) {  
    int w=getWidth(),hgetHeight();  
    for (int x=0;x<w;x++) {  
        for (int y=0;y<h;y++) {  
            g.setColor(new Color(random.nextInt()));  
            g.drawLine(x,y,x,y);  
        }  
    }  
}
```

B

# Mera slučaja

---

- Andrej Kolmogorov (1903 - 1987)

Jedna sekveca je slučajna ako suviše košta izraženo prostorom koji je potreban da se ona opiše.

Verovatnoća

---

# Verovatnoća

---

- Koje su moje šanse da osvojim loto?
  - Koje su šanse da se razbolim ako pušim paklu cigareta dnevno?
  - Kolika je očekivana dužina mog života?
- 
- Na ova pitanja odgovore možemo dobiti koristeći se izračunavanjima iz **verovatnoće**.

# Klasična definicija verovatnoće

---

Neka je  $\Omega$  konačan skup ishoda koji su jednakoverojatni.

Verovatnoća događaja  $A$  jednaka je odnosu broja povoljnih ishoda  $m$  prema broju svih mogućih ishoda  $k$ , tj.

$$P(A) = \frac{m}{k}$$

# Klasična definicija verovatnoće

---

- Verovatnoća je uvek između 0 i 1!
  - 0 - nemoguć događaj
  - 1 - siguran događaj, tj. događaj koji će se sigurno desiti

# Slučajan događaj i podjednaka verovatnoća

---

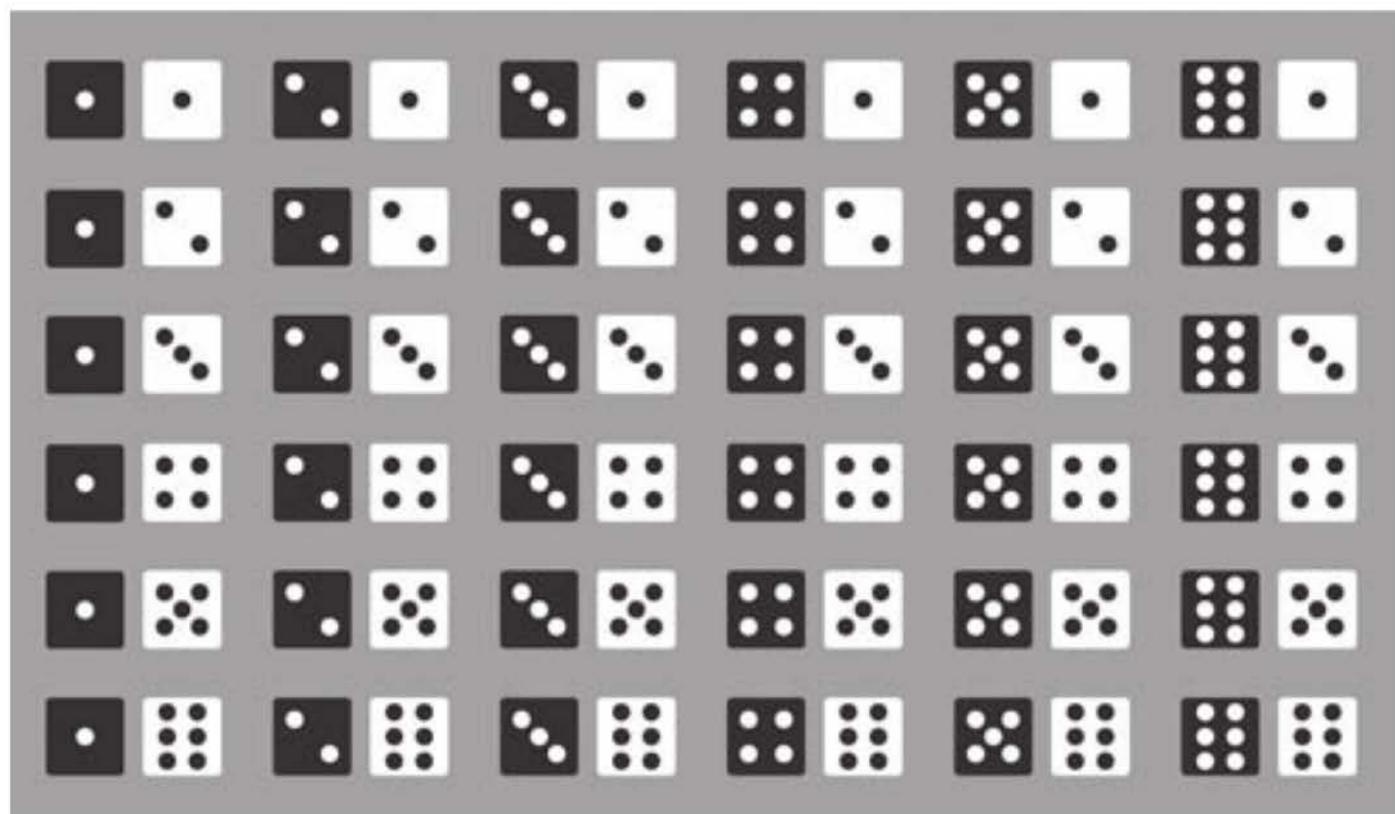
- Slučajni događaji ne moraju biti podjednako verovatni!
- Primer: biramo jedan proizvoljan prirodan broj (pozitivan, ceo)
- Kada bi to moglo svaki događaj bi imao verovatnoću  $P \neq 0$ .
- Zbir svih verovatnoća bi bio  $\infty$ , umesto 1.

# Igra sa kockicama

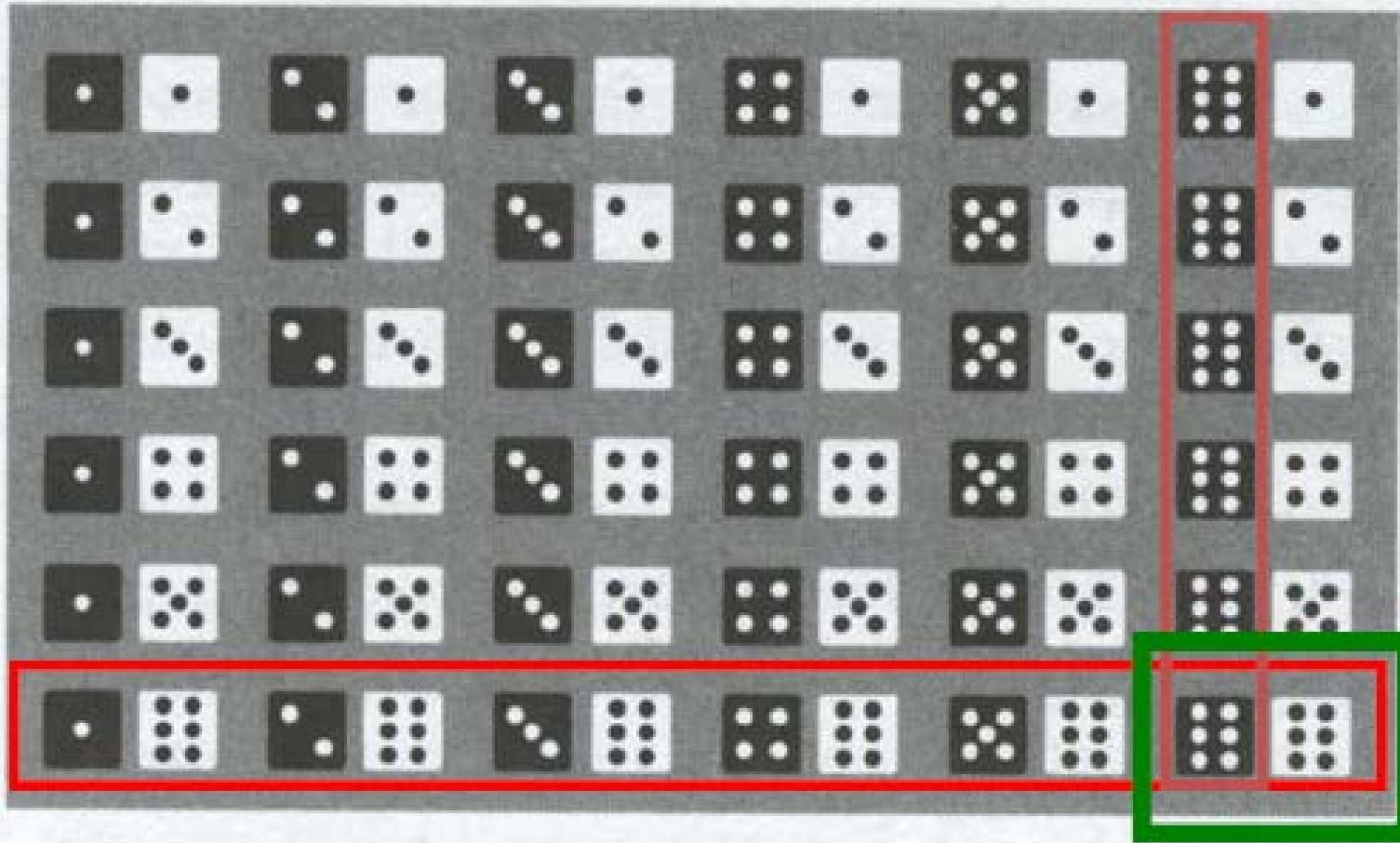
---

- Vitez de Mere, prijatelj Blez Paskala, voli da se kocka. Ima par pravila.
  - Pre svake igre proverava kockice.
  - Prva računica:
    - u bacanju dobije 6:  $\frac{1}{6}$
    - u 4 bacanja dobije 6:  $4 * \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$
  - Druga računica: a šta ako koristim 2 kockice?

# Igra sa kockicama



# Igra sa kockicama



# Igra sa kockicama

---

- Druga računica:
  - u bacanju dobije dve 6:  $\frac{1}{36}$
  - u 24 bacanja dobije dve 6:  $24 * \frac{1}{36} = \frac{2}{3}$
- Trebalo bi da dobija kada igra sa dve kockice, ali to nije slučaj. Zašto?

# Klasična greška kod korišćenja verovatnoće

---

- **Klasična greška:** drugo bacanje kockice nema nikakve veze sa prvim bacanjem kockice. To su nezavisni događaji. Svaki ima istu verovatnoću  $\frac{1}{36}$ .

- **Nezavisni događaji A i B:**

$$P(A \times B) = P(A) \times P(B)$$

- Primer zavisnog događaja:  
Bacam prvu kockicu i ako je ona veća od 3, bacam drugu kockicu.

# Klasična greška kod korišćenja verovatnoće

---

- Vitez de Mere nije dobro izračunao.
- Prva računica:

$\left(\frac{5}{6}\right)^4$  - verovatnoća da u ni u jednom od četiri bacanja ne padne 6

$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.482$  - verovatnoća da u jednom od 4 bacanja padne 6

# Klasična greška kod korišćenja verovatnoće

---

- Druga računica:

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.491 - \text{verovatnoća da u jednom od 24 bacanja padne 6}$$

# Klasična greška kod korišćenja verovatnoće

---

- **Klasična greška:**

Ne umemo da procenimo  
da li događaji zavise jedan od drugog ili su nezavisni.

# Primeri

---

- Verovatnoća događaja je relacija između **broja načina na koji događaj može da se dogodi** u odnosu na **ukupan broj svih ishoda!**
- Drugim rečima: potrebno je eksperimentisati, raditi testove, skupljati podatke da bi se odredila verovatnoća nekog događaja
  - Koja je verovatnoća da Đoković pobedi Federera?
  - Koja je verovatnoća da sutra pada kiša?
  - Koja je verovatnoća raka pluća kod pušača?

# Matematička i intuitivna verovatnoća

---

- Malo je verovatno da će sutra ručati u Nepalu – ne može se kvantifikovati
- Malo je verovatno da sutra padne meteorit na naseljeno mesto – može se kvantifikovati: broj meteorita koji padnu na Zemlju naspram površine koju zauzimaju naseljena mesta itd...
- Mirko Cvetković: „Malo je verovatno odmrzavanje plata i penzija 2010. godine“ poznavanje ishoda

# Primer sa loto igrom

---

- Na listu je 39 brojeva.
- Igrač bira 7 brojeva.
- Kombinacije:

$$\binom{n}{k} = \binom{39}{7} = 15.380.937$$

- Šansa: 1 u 15 miliona da se osvoji loto

# Primer sa loto igrom

---

- Šansa: 1 u 15 miliona da se osvoji loto
- Primeri za poređenje:
  - 1 u milion šansa da se pogine ukoliko se vozi bez pojasa 100 kilometara.
  - 1 u milion šansa da se pogine ukoliko se vozi motor bez kacige 5 minuta.
  - 1 u milion šansa da se pogine ukoliko se vozi u avionu 10 minuta.

# Primer sa loto igrom

---

- Šansa: 1 u 15 miliona da se osvoji loto

saobraćajna nesreća	1 u 5.300
udaviti se	1 u 20.000
od terorista u poseti stranoj zemlji	1 u 600.000
udar groma	1 u milion

# Kockarska zabluda (ili Monte Karlo zabluda)

---

Pogrešno verovanje da se neki događaj može desiti sa većom verovatnoćom u budućnosti jer se nije desio u prošlosti.

Pri tome ovaj događaj ne zavisi od događaja koji su se desili u prošlosti.

# Kockarska zabluda (ili Monte Karlo zabluda)

---

- Primer:

Prilikom bacanja se 2 puta za redom pojavila glava.

Verujemo da se sada „mora“ pojaviti pismo.

- U narodu poznatije kao: **treća – sreća**
- Ipak, verovatnoća je i dalje ista:  $\frac{1}{2}$

# Pogrešna interpretacija verovatnoće neverovatno slučajni događaji

---

- Neverovatno: ove nedelje sam našao na ulici 4 puta novčić od 20 dinara – moram da igram loto! Nešto me hoće pare... Treba da uplatim loto!
- da, ali: bilo koji tip događaja je mogao da mi privuče pažnju:
  - račun u samoposluzi na 1111,11 RSD
  - oblak u obliku džaka sa parama
  - itd.

# Pogrešna interpretacija verovatnoće neverovatno slučajni događaji

---

- Neverovatan događaj je neverovatan (verovatnoća = 0)
- Ako se dogodi „neverovatan događaj“ (ma kakav), on je verovatan!
- Opasnost: da li je događaj X koji se desio zaista bio predskazan?
- Lako je biti prorok naknadno!

# Verovatnoća a posteriori

---

- Na primer:
  - pokušajte da ubedite dobitnika na lutriji da nije trebalo da igra jer je dobitna kombinacija bila neverovatna, ali se, eto, ipak pojavila!
  - Dakle, procena verovatnoća događaja ima smisla samo **pre događaja!**

# Pogrešna interpretacija verovatnoće neverovatno slučajni događaji

---

Slučajni događaji kojima se pripisuje epitet izvanredni, neverovatni.

Verovatnoća se upotrebljava na pogrešan način i deluje da:

- potvrđuje neku neobičnu činjenicu
- verovatnoću nekog događa predstavlja beskrajno malom – samim tim sam događaj je izvanredan.

# Primer 1:

## Stariji sinovi i parapsihologija

---

Istraživanje je pokazalo da su najpoznatiji medijumi stariji sinovi u porodici. Mnogi zagovornici parapsihologije su uznemireni i pokušavaju da objasne ovu činjenicu i daju različite hipoteze.

Da li su sa razlogom uznemireni?

# Primer 1:

## Stariji sinovi i parapsihologija

---

- Pa... u bilo kojoj populaciji, uvek ima više starijih sinova
- Posmatrajmo porodicu sa 2 dece:
  - Dečak, Dečak – stariji sin
  - Dečak, Devojčica – stariji sin
  - Devojčica, Dečak – stariji sin
  - Devojčica, Devojčica
- Znači u 3 od 4 slučaja u porodici sa 2 dece imamo starijeg sina.
- Isto se dobija i za veće porodice, sa više dece.

# Primer 2: Intuicija

---

Gospodin Marko je veoma uzbudjen. Razmišlja o svom prijatelju, Jovanu i pet minuta kasnije, zazvonio je telefon i Marku su rekli da je Jovan preminuo.

Da li možemo ovo objasniti verovatnoćom?

Tj. da li je verovatnoća ovog dogođaja zaista tako mala da događaj smatramo neverovatnim?

# Primer 2: Intuicija

---

- Marko ima 1000 prijatelja
- Za smrt svakog od njih će čuti u toku narednih 30 godina.
- Pretpostavimo da Marko o svakome od njih misli samo jednom tokom 30 godina.
- Kolika je verovatnoća da će Marko da misli o nekome od njih i nakon pet minuta dobije obaveštenje da je preminuo?

# Primer 2: Intuicija

---

- Broj intervala od 5 minuta tokom godine?

$$365 * 24 * \frac{60}{5} = 105.120 \text{ intervala.}$$

- Verovatnoća za Marka je:  $P = \frac{1}{105.120}$ .
- Verovatnoća jeste jako mala.

# Primer 2: Intuicija

---

- Ipak....
- Prepostavke su slabe.
- Ako uzmem da Marko živi u populaciji sa 7 miliona stanovnika.

$$P * 7.000.000 \sim 665 \text{ ljudi.}$$

- Znači oko 665 takvih slučajeva godišnje.
- Više od jednog slučaja dnevno.
- Dakle, moguće je, ali nije slučaj.

# Primer 3: Rođendan

---

U prostoriji je 30 osoba.

Kakva je verovatnoća da bar dve osobe imaju rođendan istog dana?

Intuitivno – malo verovatno...

# Primer 3: Rođendan

---

Varijacije, ukupan broj mogućnosti za različite rođendane, za 30 osoba:

$$365 * 364 * \dots * 336$$

Ukupan broj svih mogućnosti:

$$365^{30}$$

Znači, verovatnoća da svi imaju različit datum je:

$$\frac{365 * 364 * \dots * 336}{365^{30}} \sim 0.29$$

Verovatnoća da su nekim osobama rođendani istog dana:  $0.71 = 71\%$ !

# Primer 3: Rođendan

---

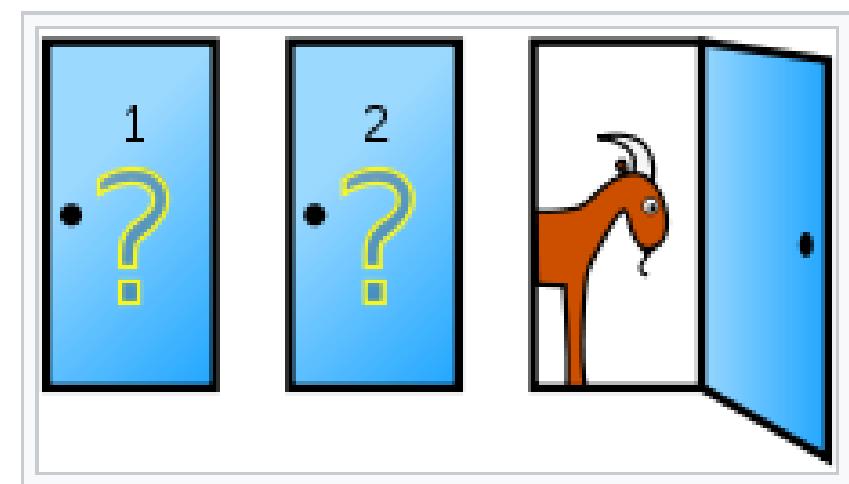
- Opšta formula za rođendane:

$$P(n) = 1 - \frac{365!}{(365 - n)!} * \frac{1}{365^n}$$

- Verovatnoća da su nekim osobama rođendani istog dana za 50 ljudi: 97%

# Primer 4: Montiholov paradoks

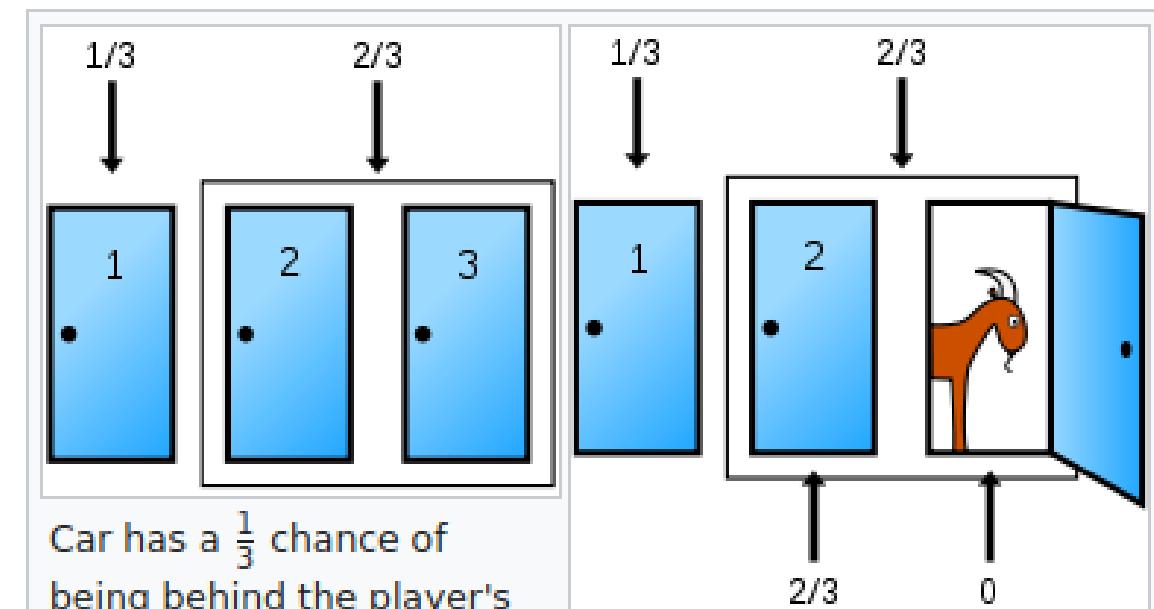
- Američki televizijski šou „Hajde da se dogovorimo“, voditelj Monti Hol, 1975. godina.
- Iza vrata se nalazi koza ili auto.
- Takmičar bira jedna vrata.  
Nakon toga, voditelj otvori neka druga vrata iza kojih je koza. Nakon toga pita takmičara da li želi da promeni izbor.



Primećeno je da takmičar treba da promeni svoj prvobitni izbor i da su mu tada šanse veće!

# Primer 4: Montiholov paradoks

- Naivno objašnjenje  
(slika preuzeta sa Wikipedija stranice):



Car has a  $\frac{1}{3}$  chance of being behind the player's pick and a  $\frac{2}{3}$  chance of being behind one of the other two doors.

The host opens a door, the odds for the two sets don't change but the odds move to 0 for the open door and  $\frac{2}{3}$  for the closed door.

# Primer 4: Montiholov paradoks

---

- Problem je poznat od ranije
- Paradoks Bertrandove kutije (1889. godina)
- Paradoks tri zatvorenika (1959. godna)

# Primer 4: Montiholov paradoks

---

- Zapravo može se izvesti rezultat korišćenjem **Bajesovog pravila**.
- Ovde važe pravila **uslovne verovatnoće**.

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A), \text{ tj. } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Ovo pravilo se može proširiti i dalje, ako imamo 3 događaja koja međusobno zavise: izabrao vrata, iza vrata je auto, otvorio vrata
- Nama treba: verovatnoća da je auto iza vrata 2 pod uslovom da je prvo izabrao vrata 1 i da su se otvorila vrata 3.

# Primer 4: Montiholov paradoks

I1 – izabralo vrata 1

O3 – otvorio vrata 3 (i tu vidimo da je koza)

K2 – kola su iza vrata 2

$$\begin{aligned} P(K2|I1, O3) &= \frac{P(K2, I1, O3)}{P(O3, I1)} = \frac{P(O3|K2, I1)P(K2, I1)}{P(O3, I1)} \\ &= \frac{1 \cdot P(K2)P(I1|K2)}{P(O3|I1)P(I1)} = \frac{P(K2)P(I1|K2)}{P(O3|I1)P(I1)} \\ &= \frac{P(K2) \cdot 1}{P(O3|I1) \cdot 1} = \frac{P(K2)}{P(O3|I1)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

# Primeri pogrešnog prepoznavanja slučajnog događaja

---

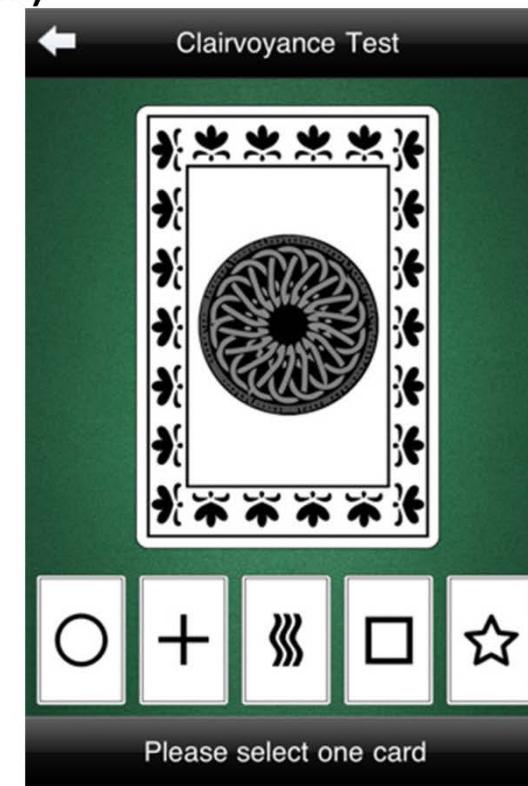
# Primer 5: Zenerove karte

---

- Jozef Banks Rajn (eng. Joseph Banks Rhine) (1985 – 1980) osnovao „Laboratoriju za parapsihologiju“ na Univerzitetu Djuk (SAD).
- Karl Zener (1903 - 1964), psiholog
- Zajedno su osmislili pojam

Ekstrasenzorna percepcija –  
prijem informacija umom, a ne fizičkim čulima. Šesto čulo.

# Primer 5: Zenerove karte



# Primer 5: Zenerove karte

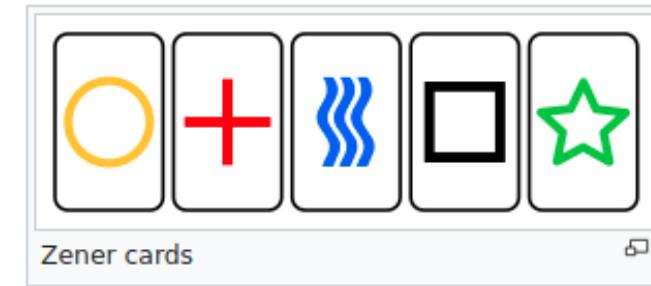
---

- Špil 25 karata ( $5 \times 5$ )
- Izvlači se jedna karta iz špila, a medijum pogoda šta je na njoj.
- Kada ispitanik pogodi sve karte, možda ima moć ekstrasenzorne percepcije, odnosno možda je vidovit.
- Na 1000 eksperimenata, 1 pogodak.

# Primer 5: Zenerove karte

---

- Uočeno je mnogo problema sa eksperimentom.
- Karte mogu biti loše promešane.
- U naočarima ispitanika se reflektovala karta.
- Karte mogu na neki način biti označene.
- Pažljivi posmatrač može detektovati disanje i pokrete ispitanika i to povezivati sa kartom.
- Nakon što je otklonio sve zamerke i ponovio test, nisu našli ni jednog vidovnjaka.



# Primer 6: Biblijski kod

---

Majkl Drosnin (eng. Michael Drosnin), američki autor i pisac je pronašao tajni kod u Tori (Hebrejska Biblij).

# Primer 6: Biblijski kod

---

- Njegove tvrdnje da je u Bibliji sledeće zapisano:
  - Klinton + predsednik
  - nacisti i neprijatelji + Hitler + masakr + rđav čovek
  - Šekspir + prikazan na sceni + Hamlet + Magbet
  - Edison + elektricitet + električna sijalica
  - predsednik Kenedi + umreti + Dalas

# Primer 6: Biblijski kod

---

**Korak 1:** uprosti tekst uklanjajući akcente, interpukciju itd.

Comme c'est surprenant de voir  
un code, dans ce champ à mots,  
élégamment dissimulé



COMMECESTSURPRENANTDEVOIRUNCODEDANS  
CECHAMPAMOTSELEGAMMENTDISSIMULE

stvaran prevod: kako je iznenadujuće videti u šumi reči elegantno skriveni kod

# Primer 6: Biblijski kod

---

**Korak 2:** Izdvoji svako  $n$ -to slovo. Npr.  $n = 11$ .

COMME**C**ESTSURPRENANTDEVOIRUN**C**ODEDANS  
CE**H**AMPAMOTSELE**E**GMENTDISSIMULE

# Primer 6: Biblijski kod

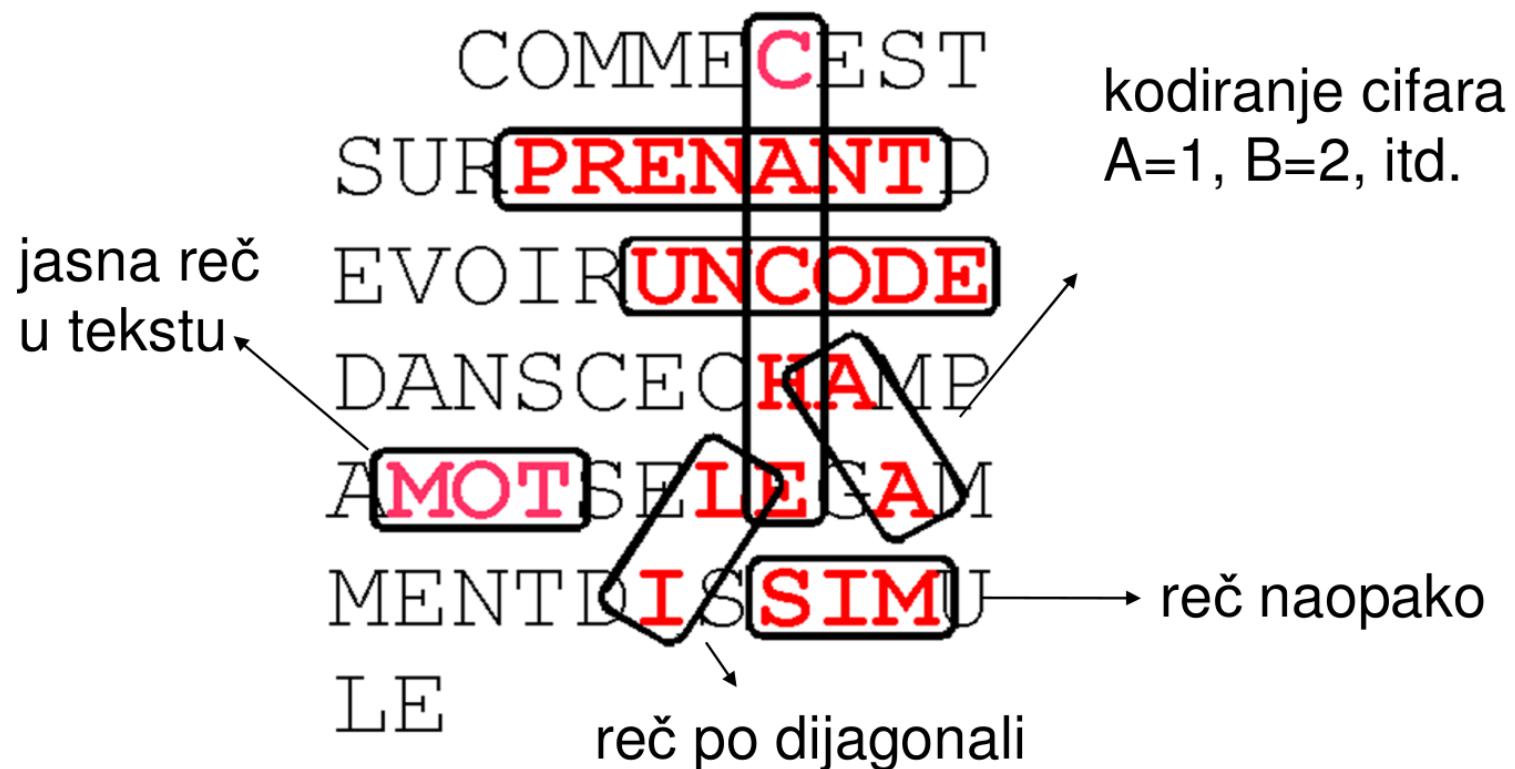
---

**Korak 3:** Prikazati rezultat u obliku matrice. Npr. 11x11 matrica.

COMME CESTSU  
RPREN A NTDEV  
OIRUN C ODEDA  
NSCEC H AMPAM  
OTSEL E GAMME  
NTDISSIMULE

# Primer 6: Biblijski kod

Korak 4: Potražiti reči u matrici.



# Primer 6: Biblijski kod

---

**Konačan rezultat:**

Il a mis un mot caché prenant un code 11

**Prevod:**

*stavio je skrivenu reč uzimajući kod 11*

# Primer 6: Biblijski kod - kritike

---

- Brojne kritike:
  - Drosnin radi na hebrejskim tekstovima
  - Hebrejski jezik ima samo 22 slova
  - Zastarele reči se mogu prevoditi na razne načine
  - U hebrejskom se ne zapisuju vokali – moguće su razne interpretacije:  
kst = kost, kosat, kosti, kist, ...
  - Prevelika sloboda u pretraživanju
  - Interpretacije grupe reči:  
avion + kula = 11. septembar i kontrolni toranj

# Primer 6: Biblijski kod - kritike

---

- Brojne kritike:
  - Verzije koje imamo su kopije od kopije od kopije...
  - A sve zavisi od jednog slova

Drosnin odgovara:

When my critics find a message about the assassination of a prime minister  
encrypted in Moby Dick, I'll believe them.

(Newsweek, Jun 9, 1997)

prevod:

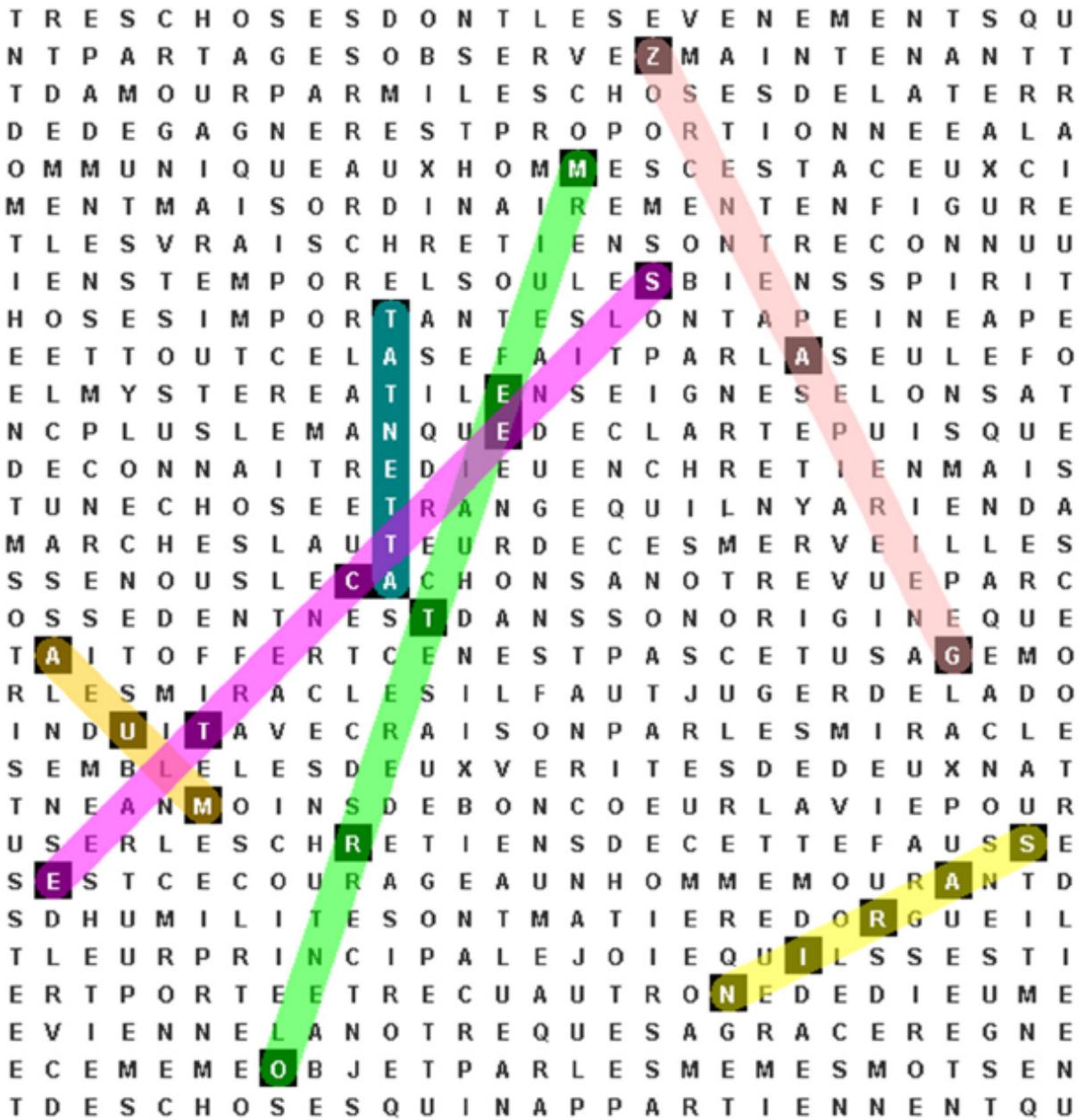
Ako moji kritičari u Mobi Diku nađu poruku o ubistvu premijera, ja ću im verovati.

# Primer 6: Biblijski kod - kritike

---

- Njegovom pozivu su se odazvali mnogi i evo šta je pronađeno u Mobi Diku:
  - premijer + Indira Gandhi
  - sveštenik Martin Luter King
  - Abraham Linkoln + ubijen
  - on će biti ubijen + Džon F. Kenedi

*attentat  
gaz sarin  
 métro  
secte Aum*



LAME FORT ELEVEE POUR COMPRENDRE QUI NY  
ME QU'ES ON ETATRIENNELUI EST SIRE DOUTAB  
VOIR DANS DESSENTIMENTS SOULON A POUR COM  
ION QUE LA NOTRE N'A ENSEIGNE QUEL HOMMEN A  
IOU CELLE DU MESSIE DONT ELLE ETAIT LA PRO  
US RENDERAIS ON DE L'OPPOSITION QUE NOUS A  
NFI SISIL HOMMEN AVAIT JAMAIS ETÉ CORROMP  
ES DES STOICIENS SET DES EPICURIENS DES DO  
RAISON LA DERNIERE DEMARCHE DE LA RAI SON  
VENT JUGER QUIILLEURE STAVANTAGEUX DEC R  
LQUES VERITES ILS DOIVENT ETRE DECELL  
SPERSONNES AU PRES DEMOIS DESSEMBLABLENA  
VESET TENDANT DEPUIS LES PREMIERS TEM  
RPS PLUS GENERAL QUI CONQUE NE HAIT POINT  
ETERNITE ET ILS SONT ME CONNU DE MEME DANS  
TILTROUBLE LA CONVOI ITISE AINSI LE MOT DE  
NTENDPOINTET TOUT CELA EST PREDIT CAR IL  
ES CEST ADIRE SILY FAUT CHERCHER QUELQUE  
SENS DANS LEQUEL TOUS LES PASSAGES CONTR  
LA JUSTICE ETERNELLE ENON LA LEGALE MAIS L  
SAUXEVANGELISTES LES QUALITES DUNE AME  
SETAIENT DANS L INFIDELITE ET DANS LA CON  
IGE EN UNE INFINITE DEMANIERE SA BREUVED  
AQUELLE LA CHOSE A ETÉ FAITE JESUS CHRIST  
ET DES PROPHETIES MANIFESTES ACCOMPLIE  
ISERE DEL HOMME OU LA MISSION CORDE DE DIEU  
LLENE CONSISTAIT EN AUCUNE DE CES CHOSES  
TRE LESQUELS ILS SESONT CONTINUELLEMENT  
COMMUNIQUERSANS MEDIATEUR AVEC CEDIEU  
TOUT AVEC CERTITUDE QUOI QUE PAR DIFFERE  
ECREUSE DUNE VERTU FANTASTIQUE NOTRE IN  
EI DEEN APPROCHE DE LETENDUE DE SES ESPACES  
IIGRANDEUR DEL HOMME JE PUIS BIEN CONCEV

*Nicolas et Carla se sont unis le 06 fev 08  
(Sarkozy, Bruni)*

# Literatura

---

- Carl Sagan, and Fintan R. Steele. *The demon-haunted world: science as a candle in the dark.* Nature Medicine 2.9 (1996): 1042-1042.
- Henri Broch. *Paranormal vs. Zetetics at the University.* (1999).  
[\(prevod na srpskom\)](#) Infoteka 15(2), 2014)
- Normand Baillargeon. *A Short Course in Intellectual Self-Defense*, UQAM, Seven Stories (2008).
- Milivoj Čatipović. *Podvale, obmane i zablude u svijetu nauke* (delovi)
- Beleške sa predavanja, literatura sa interneta i drugi samostalni izvori

# Hvala



Staša Vujičić Stanković



stasa@math.rs



[www.matf.bg.ac.rs/~stasa](http://www.matf.bg.ac.rs/~stasa)